ＭＡ　Hoermander 多変数複素解析を読む　講義報告[6]

２００８年7月２6日（土）　１４：００－１６：００

前回証明した非斉次 Cauchy - Riemann 方程式の解の存在定理を用いて、$Hartogs$ の定理を証明した。次に、Reinhardt 領域と Reinhardt 領域が対数凸になることの定義を行い、形式ベキ級数の収束域が空でないならば、完全 Reinhardt 領域でかつ、対数凸であることを証明した。

定理 1.17 ($Hartogs$ の定理). Ω を $\mathbb{C}^n,\ n > 1,$ の開集合、K は Ω 内のコンパクト部分集合で、$\Omega \setminus K$ が連結であるとする。このとき、任意の $u \in \mathcal{A}(\Omega \setminus K)$ に対して、

$$U(z) = u(z) \quad for\ \forall z \in \Omega \setminus K$$

となるような $U \in \mathcal{A}(\Omega)$ が存在する。すなわち、

$$r : \mathcal{A}(\Omega) \ni f \longrightarrow f|_{\Omega \setminus K} \in \mathcal{A}(\Omega \setminus K)$$

とおいたとき、r は単射環準同型であるが、この定理は r が全射でもあることを主張している。

1.4　整級数とラインハルト (Reinhardt) 領域

定義 1.7 (Reinhardt 領域). $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ が $\vec{0}$ を中心とした ***Reinhardt* 領域**であるとは、

1). Ω は $\mathbb{C}^n$ の開集合。

2). 任意の $\vec{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \Omega$ に対して

$$(z_1\xi_1, z_2\xi_2, \cdots, z_n\xi_n) \in \Omega \quad for\ \forall\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n\ such\ that\ |\xi_1| = 1, |\xi_2| = 1, \cdots, |\xi_n| = 1$$

を満たすことである。特に、

2'). 任意の $\vec{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \Omega$ に対して

$$(z_1\xi_1, z_2\xi_2, \cdots, z_n\xi_n) \in \Omega \quad for\ \forall\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n\ such\ that\ |\xi_1| \leq 1, |\xi_2| \leq 1, \cdots, |\xi_n| \leq 1$$

を満たすとき、Ω を**完全 *Reinhardt* 領域**という。

定義 1.8. $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を $Reinhardt$ 領域とするとき、

$$B_\Omega = \{(|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_n|) \mid (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \Omega\}$$

を Ω の**基底**という。

練習問題 1.4. $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を $Reinhardt$ 領域とするとき、

1. $B_\Omega \subset \Omega$

[6]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

2. $\Omega = \{(\xi_1 r_1, \xi_2 r_2, \cdots, \xi_n r_n) \mid (r_1, r_2, \cdots, r_n) \in B_\Omega \mid |\xi_1| = |\xi_2| = \cdots = |\xi_n| = 1\}$

定義 1.9 (対数凸). *Reinhardt* 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ が**対数凸**であるとは、

$$\log B_\Omega = \{(\log r_1, \log r_2, \cdots, \log r_n) \mid (r_1, r_2, \cdots, r_n) \in B_\Omega \ r_j > 0 \ (j = 1, 2, \cdots n)\}$$

が $\mathbb{R}^n$ の部分集合として、凸集合になることである。

Ω_f を $f(z) = \sum_{J \geq 0} \hat{f}(J) z^J$ の収束域とする。すなわち、$z_0 \in \Omega_f$ であるための必要十分条件は、z_0 の近傍で $\sum_{J \geq 0} \hat{f}(J) z^J$ が絶対収束することである。$\mathbb{C}^n$ の部分集合を

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid \sup_J |\hat{f}(J)||z|^J < \infty \right\}$$

とおく。B の定義から、

$$z_0 \in B \Leftrightarrow \exists M_{z_0} > 0 \quad \text{such that} \quad |\hat{f}(J)||z_0|^J < M_{z_0} \quad \text{for } \forall J \in \mathbb{N}_0$$

練習問題 1.5. $\Omega_f = B^\circ$ なることを示せ。

補題 1.6 (*ABEL* の補題). $f(z) = \sum_{J \geq 0} \hat{f}(J) z^J$ が与えられたとき、$w \in B$ ならば、多重円板 $\Delta(\vec{0}, |w|)$ で形式ベキ級数 $\sum_{J \geq 0} \hat{f}(J) z^J$ は正規収束し、$f(z) = \sum_{J \geq 0} \hat{f}(J) z^J$ は正則になる。

定理 1.18. 形式ベキ級数 $\sum_{J \geq 0} \hat{f}(J) z^J$ の収束域 Ω_f が空でないならば、Ω_f は完全 *Reinhardt* 領域で、かつ、対数凸である。

記録 by J.S